

非平衡基礎論とジャミング転移研究の融合

東京大学大学院総合文化研究科・教授 佐々真一

成果概要

ジャミング転移は、標準的な流体方程式に従わない「奇妙な流れ」が協同的に停止する転移、および、それに類似した転移の総称である。その振る舞いについて、非平衡統計力学の視点から理解を深めてきた。本年度の成果は次の2点にまとめられる。第1に、非平衡確率過程モデルから巨視的なゆらぎの動力学を議論する際の数理技術の開発を行ったこと。第2に、クエンチされた乱れが入った系の $T=0$ 動力学について、厳密な解析を行ったこと。どちらの成果も個別問題の結果としては極めて明晰であり、論文としてまとめられ投稿された。しかしながら、大きな問題の中では準備研究の位置づけになっており、引き続き展開が必要である。

1. 非平衡確率過程の数理技術の開発

特異な非平衡系の巨視的な振る舞いを数理的に記述するためには、「粗視化」をすればよいことは原理的には分かっている。しかし、非平衡系では、「粗視化技術」は成熟していない。例えば、ずり応力下の水分子の集まりが流体方程式で記述されるのはおそらく正しい事実であろうが、それを導出する方法を持っていない。私たちができるのは、希薄気体という理想極限に対してボツルマン方程式を経由して、流体方程式を導出することに留まっている。本研究課題で対象とする「ジャミング転移」は、通常の流体ではない「異常な流れ」と関わっているため、それを微視的な立場から理解するためには、非平衡統計力学の記述において「粗視化技術」を整備する必要がある。

あるミクロな非平衡過程を記述する確率過程が与えられると、それに対応する経路積分表示をつくることができる。この経路積分表示に対して、くりこみ群などの方法で長距離長時間の振る舞いを取り出すというのが確立したアイデアのように見えた。実際、そのような研究により、directed percolation などの非平衡臨界現象の指数は計算されている。しかしながら、広義の流体力学をそこから議論する際には、混乱した状況にあった。

この混乱した状況を明示的に整理するには、システムサイズ展開によって巨視変数のゆらぎが議論できるようなもっとも簡単な系を考察するだけで十分である。例えば、伝統的な展開方法による結果と経路積分表示からの展開では全く異なるゆらぎの時間発展を与える形になっている。この見かけのパラドックスの解決に向けた提案もされていたが、数学的には奇妙な形になっていた。そこで、私は、高エネルギー研究所の板倉氏、物性研究所の大久保氏と共同研究をすすめ、このパラドックスに対する完全な解答を与え、ミクロな確率過程から巨視的ゆらぎを議論する基盤の確認を終えた。この結果を論文としてまとめ、*J. Phys. A* に投稿した。（参考文献[1]参照。）二人の査読者から高い評価を得て、掲載が決定している。

近年、ジャミング転移を大偏差原理の観点から理解しようとする研究が活発化しつつある。その問題はこの研究結果の自然な延長上にあり、現在、検討を進めている。

2. 乱れた系における遅い動力学の厳密解析

ジャミング転移は新しいタイプの非エルゴード転移だと考えられている。特に、そこでの緩和時間の異常性については、転移点からの距離の逆数の関数として指数関数的増大を示す例が知られているなど通常の臨界緩和とは様相が異なることが示唆されている。ところで、歴史をふりかえると、協同現象の結果としての遅い緩和は、65年—75年前後の臨界緩和、75年—85年前後の秩序化過程、85—95年前後のガラス系の緩和など、新しい対象が提起されるごとに徹底的に調べられてきた。それらの研究では、現象を特徴づける量が提案され、関連する現象が分類され、機構が追求されてきた。00年以降にジャミング転移については、まだ現象のリストアップも不十分な段階である。

例えば、クエンチされた乱れがある系の $T=0$ 動力学は、ジャミング系の典型的状況だと考えられているが、「その典型性」を示す雛型模型は確立していない。ここでの雛型模型とは、臨界緩和や秩序化過程における平均場イジング模型のグラウバー動力学、ガラス系における平均場球状スピングラスにおけるモード結合方程式など、その時代における新奇な様相を示す特徴的性質が厳密に解析される模型のことをいう。ジャミング転移においても、そのような雛型を提案することが決定的に重要であろう。現在までに、2次元系において厳密に解ける模型が数年前に構築されたが、これは数学的色彩が強すぎて、それに引き続く発展が容易ではない。平均場レベルで厳密に解析できる模型を提案することが重要である。

この動機に従い、ランダムグラフ (=ベータ格子) 上で定義された遅い動力学の研究をすすめた。ジャミング的な振る舞いを示す模型に対する数値実験は可能であるが、ベータ格子においてすら動力学の厳密な解析は大変難しいことを実感した。そもそも、ジャミング転移と関係なくともベータ格子上の協同的動力学が厳密に解析された例はない。ましてや、クエンチされた乱れがある系の動力学の解析は途方もないように見えた。

この状況で、私は、大学院生の太田氏と共同研究をすすめ、「ランダム磁場イジング模型の $T=0$ 動力学」について、特定の初期条件からの協同的緩和過程に対する厳密な記述を導出した。その結果として、この模型において乱れが強いところで生じる臨界点での緩和動力学は力学系としてはふたつのサドルノード分岐点の合流点に相当することを明らかにし、様々な動的臨界指数を決定した。当然のことながら、数値実験との一致は完全である。この結果を論文としてまとめ、現在、*Europhys. Lett* に投稿中である。(参考文献[2]参照。)

この方法は、ある程度の汎用性があり、いくつかのクラスについて適用できるので更なる発展が期待される。しかしながら、解析した模型の振る舞いは、ジャミング転移に典型的なものではないと考えている。乱れが引き起こす転移にも関わらず、標準的な臨界緩和の範疇に含めるのが正しいようだ。ジャミング転移の雛型を示すことは今後継続していくことになる。

<参考文献>

- [1] K. Itakura, J. Ohkubo, S. Sasa, Two Langevin equations in the Doi-Peliti formalism, arXiv:0912.1652
- [2] H. Ohta and S. Sasa, A universal form of slow dynamics in zero-temperature random-field Ising model, arXiv:0912.4790