非平衡基礎論とジャミング転移の融合

東大院総合文化・教授　佐々真一

1. 初期の研究目標と実際の研究推進

不規則にこみいった系において、各要素がお互いの運動の邪魔をしあうことで生じる協同的停止状態への転移を総称してジャミング転移とよぶ。その現象に対する理解を深めるとともに、それに関連させた形で非平衡基礎論を発展させ、両者を融合していくのが当初の研究目標であった。残念ながら、この２年間では、融合が達成されたとは言い難い。それでも、以下で述べるように、ジャミング転移については、ある多体模型について厳密な集団動力学を導くことができ、非平衡基礎論については、まれな動的事象のゆらぎを特徴づける大偏差関数を操作的に決める公式を見出し、そして、両者の融合を考える最適な題材ともいうべき状況として、微小なずりが引き起こす臨界現象を見出した。

2. 研究成果

2－１．ジャミング転移

協同的停止状態への転移を記述する動力学をミクロな要素の集まりから導出することを考える。典型的な例として、「周囲の粒子がある条件を満たすまで自分は動けない」という多体系を考える。これは運動論的拘束模型とよばれ、ジャミング転移を示すことが知られている。この状況はランダム磁場イジング模型のゼロ温度動力学でも同様である。このような系の巨視変数に対する動力学を導出する一般的手法はまだ明らかにされていない。これは平均場模型やランダムグラフ上模型に限定してもそうである。そういう状況で、ランダムグラフ上ランダム磁場模型の場合に、厳密な動力学を導出することに成功した。（これは文献[1]として公表されている。）　この方法が使える模型に制限はあるものの、様々な議論を展開していく上で出発点になりえるだろう。 また、それらの動力学でもっとも簡単な場合が、初等的なサドルノード分岐する力学系として表現できる。その場合に、ゆらぎの動力学を精密に理論解析する方法をまとめた。（これは文献[2]として公表されている。）　実際の分岐構造は「初等的」でなく、まだ理解されていないことが多いが、そこで得た多くの知見は今後役たつであろう。さらに、有限次元でジャミング転移が生じることが理論的に示せる例の構築に取り組んだ。その第一歩として、ゼロエントロピー不規則基底状態と関係する相転移を示す格子模型を提案した。（これは文献[3]として公表されている。）現在、その模型の延長として、平衡状態でガラス秩序を示す有限次元系の構築を行っており、その系の動力学を理論的に解析することが次の自然な問題となっている。

2－2．非平衡基礎論

ジャミング転移の特徴のひとつとして、「めったに起こらないがひとたび生じればそれがカスケード的に伝搬する事象が存在すること」が挙げられる。そのような系においては、まれな動的事象のゆらぎを定量化する必要がある。たとえば、時間間隔 t の間の粒子の平均移動

距離Ｖの分布関数を考えると、その分布関数はｔが大きくなるにつれて急激に鋭くなる。そのピーク値からのｔについて指数関数的に小さな因子ＧのＶ依存性を関数G(V)としてあらわされる。このG(V)は大偏差関数と呼ばれ、まれに生じるゆらぎの統計的性質を特徴づける。

対象とする系が定まれば、それに応じてG(V)が定義される。ただし、数学的にきちんと定義されているものの、実際に測定するのは容易ではないし、計算するのも簡単ではない。ところが、平衡系において空間平均された物理量のゆらぎの場合には、まれなゆらぎを特徴づける大偏差関数が熱力学関数から決められる。つまり、状態方程式や熱容量の直接測定から、あるいは、統計力学に従えば微視的な世界のハミルトニアンの分配関数から、まれなゆらぎの情報を読み取ることができる。同じような構造をG(V)について得ることができれば、ジャミング転移に対する豊かな定式化につながっていく。

本研究課題では、定常状態を維持する外力とは別の外力を作用した系における平均量のデータからG(V)を決める公式を見出した。（これは文献[4]として公表されている。） この公式はまだ１体のランジュバン系だけしか適用されていないが、多体系やゆらぐ連続場模型について適用できることは分かりつつある。この公式を経由して、ジャミング転移を生じる系でG(V)の異常性を具体的に記述する可能性を拓いたことになる。

2－3. 両者の融合へ向けて

ジャミング転移点近くでの非平衡系の異常性を非平衡基礎論の知見で理解しようとする前に、そもそも（それよりずっと素性がはっきりしている）液固転移近くでも全く非自明であった。具体的に、ずり流を示す溶媒中でコロイド分散系を例にとる。ずり流がない平衡条件下では、結晶化転移を示す状況である。このとき、平衡系では対称性を破る１次転移を示すが、ずり流下では、臨界的になっていることが示唆された。しかも、僅かのずりでも、このようなことが生じるということが帰結されるので、非平衡度に関する摂動的な立場では特異的になっている。（これは文献[5]で公表されている。）現在のところ、その理論的説明はない。したがって、これは非平衡基礎論を発展させる上でも恰好の題材になっている。また、ジャミング転移のひとつの典型的な例としてランダム１次転移シナリオが提案されていることを思いだすとき、ずり流の特異的摂動によってランダム１次転移からランダム２次転移へとタイプが変わる可能性を示唆しているのも重要な点である。

今後、２－１の最後で述べた「ガラス秩序を示す有限次元模型」に対して非平衡外力をかけるとき、この節で述べたような「特異摂動的応答」が生じることを確認し、２－２節で述べた「G(V)の公式の発展」を用いてその異常性を説明する理論を構築したい。これができれば、融合が達成されたといってよいであろう。その目標に向かって堅実に前進したと考えている。

＜参考文献＞

[1] H. Ohta and S. Sasa, Europhys. Lett.　**90**, 270098-1-5, (2010).

[2] M. Iwata and S. Sasa, Phys. Rev. E **82**, 011127-1-17, (2010).

[3] S. Sasa, J. Phys. A: Math. Theor. **43** 465002-1-12 (2010).

[4] T. Nemoto and S. Sasa, arXiv:1009.3379

[5] M. J. Miyama and S. Sasa, arXiv:1009.3379;　Phys. Rev. E　(in press)